JOURNAL OF APPROXIMATION THEORY 33, 281–287 (1981)

Approximation mit einer erweiterten Klasse von Exponentialsummen

GUNTER WELKER

Fachbereich Mathematik, Gesamthochschule, D-5900 Siegen 21, West Germany

Communicated by G. Meinardus

Received December 3, 1978

Wir behandeln das Problem, eine stetige Funktion f im Intervall $[0, 1]$ mit einer erweiterten Klasse von Exponentialsummen gleichmäßig zu approximieren. Die Klasse $V_n{}^T(S)$ besteht dabei aus allen reellwertigen Lösungen von homogenen, linearen Differentialgleichungen n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten, bei denen das charakteristische Polynom nur Nullstellen in einer Menge S der komplexen Zahlen besitzt. Wir geben einen sehr kurzen Beweis dafür, daß jede solche Summe n-ter Ordnung höchstens $n - 1$ Nullstellen in $[0, 1]$ besitzt, wenn die Frequenzen im Streifen $T = \{\lambda \in \mathbb{C}: |\operatorname{Im}\lambda| < \pi\}$ liegen. Bei Beschränkung auf $T^* = \{\lambda \in \mathbb{C}: 0 < |\operatorname{Im}\lambda| \leqslant L < \pi\}$ läßt sich eine Minimallösung notwendig und hinreichend charakterisieren durch eine Alternante der Länge $n + k + 1$ und die Minimallösung ist eindeutig bestimmt, falls die Frequenzen im Innern von T^* liegen.

1. DEFINITION

Es bezeichne $C[0, 1]$ den Raum der auf dem Intervall $[0, 1]$ stetigen, reellwertigen Funktionen, normiert durch die Tschbeyscheff-Norm

$$\|f\| = \max\{|f(t)|: 0 \leqslant t \leqslant 1\} \qquad f \in C[0, 1],$$

und $D = d/dt$ den für differenzierbare Funktionen erklärten Ableitungsoperator. Für $c = (c_1, ..., c_n) \in \mathbb{R}^n$ betrachten wir den Polynomoperator

$$P_n(c; D) := D^n + c_1 D^{n-1} + \cdots + c_{n-1} D + c_n . \tag{1.1}$$

Sind $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{C}$ die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $P_n(c; \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, die wir mit $\Lambda_n(c)$ bezeichnen wollen,

$$\Lambda_n(c) := \{\lambda \in \mathbb{C} : P_n(c; \lambda) = 0\},$$

so läßt sich (1.1) schreiben als

$$P_n(c; D) = \prod_{\nu=1}^{n} (D - \lambda_\nu).$$

0021-9045/81/120281-07$02.00/0

Die lineare homogene Differentialgleichung

$$P_n(c;\, D)\, y(t) = 0 \qquad t \in [0,\, 1] \tag{1.2}$$

ist eindeutig lösbar bei Vorgabe eines beliebigen Vektors $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ der Anfangswerte mit

$$D^{\nu-1} y(0) = b_\nu \qquad \nu = 1, \ldots, n. \tag{1.3}$$

Diese Lösung $y(b, c) = y(b, c; t)$ nennen wir Exponentialsumme. Sie ist von der Ordnung n, wenn sie eine Differentialgleichung der Form (1.2) n-ter, aber keine Differentialgleichung niederer Ordnung erfüllt. Zu einer Spektralmenge $S \subset \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$V_n^r(S) := \{\, y_n(b, c) \colon b,\, c \in \mathbb{R}^n,\, \Lambda_n(c) \subset S\}$$

und

$$V_0^r(S) := \{0\}$$

als unsere Approximationsfamilie. Offensichtlich bilden die Räume $V_n^r(S)$ eine aufsteigende Folge $V_0^r(S) \subset V_1^r(S) \subset \cdots \subset V_n^r(S) \subset \cdots$. Für die Elemente aus $V_n^r(S)$ erhalten wird die explizite Darstellung

$$y_n(b, c; t) = \sum_{\mu=1}^{l} P_\mu(t)\, e^{\lambda_\mu t} + \sum_{\nu=1}^{s} e^{\beta_\nu t}\{Q_\nu(t) \cos \omega_\nu t + R_\nu(t) \sin \omega_\nu t\}. \tag{1.4}$$

Dabei sind λ_μ bzw. β_ν und ω_ν reelle Zahlen und P_μ bzw. Q_ν und R_ν reelle Polynome vom Grade m_μ bzw. $m_{l+\nu}$, $\mu = 1, \ldots, l$; $\nu = 1, \ldots, s$. Weiter muß für die Ordnung k gelten

$$k = \sum_{\mu=1}^{l} (m_\mu + 1) + 2 \sum_{\nu=1}^{s} (m_{l+\nu} + 1) \leqslant n. \tag{1.5}$$

Zum Beweis beachte man, daß sich y_n schreiben läßt als

$$y_n(b, c; t) = \sum_{\mu=1}^{l} P_\mu(t)\, e^{\lambda_\mu t} + \tfrac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{s} \{(Q_\nu(t) - iR_\nu(t))\, e^{\lambda_{l+\nu} t} + (Q_\nu(t) + iR_\nu(t))\, e^{\bar{\lambda}_{l+\nu} t}\}.$$

wobei $\lambda_{l+\nu} = \beta_\nu + i\omega_\nu$ gesetzt ist. y_n ist somit Lösung der Differentialgleichung k-ter Ordnung

$$\prod_{\mu=1}^{l} (D - \lambda_\mu)^{m_\mu+1} \prod_{\nu=1}^{s} ((D - \lambda_{l+\nu})(D - \bar{\lambda}_{l+\nu}))^{m_{l+\nu}+1} y(t) = 0.$$

Umgekehrt ist jede Lösung mit reellen Anfangswerten in der Form (1.4) ausdrückbar.

Braess [1–3] beschränkte sich bei seinen Untersuchungen zur Exponentialapproximation auf $V_n^r(\mathbb{R})$, d.h. Summen der Form

$$y(t) = \sum_{\mu=1}^{l} P_\mu(t)\, e^{\lambda_\mu t}.$$

Dabei heißt l der Grad der Exponentialsumme.

Es sei $S \subset \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$ fest. Die Approximationsaufgabe besteht darin, zu einer Funktion $f \in C[0, 1]$ ein Element $y_0 \in V_n^r(S)$ zu suchen, so daß gilt

$$\|f - y_0\| \leqslant \|f - y_n\|, \qquad \text{für alle} \quad y_n \in V_n^r(S),$$

d.h. y_0 ist Minimallösung bei der Approximation bzgl. $V_n^r(S)$ mit der Abweichung

$$\rho_n(f) := \inf\{\|f - y_n\| : y_n \in V_n^r(S)\}.$$

Nach Kammler [6] ist die Existenz einer Minimallösung genau dann gegeben, wenn die Spektralmenge $S \subset \mathbb{C}$ abgeschlossen ist.

2. Eigenschaften von Exponentialsummen

Neben der stetigen Differenzierbarheit der durch das Anfangswertproblem (1.2) und (1.3) definierten Abbildung

$$y_n : \mathbb{R}^{2n} \to V_n^r(\mathbb{C})$$
$$(b, c) \to y_n(b, c)$$

interessiert die Maximalzahl der Nullstellen einer Exponentialsumme. Besitzt das charakteristische Polynom der definierenden Differentialgleichung nur reelle Nullstellen, so ist bekannt, daß jede Summe aus $V_n^r(\mathbb{R})$ höchstens $n - 1$ Nullstellen besitzt: Pólya–Szegö [12], Meinardus [9]. Wir zeigen auf einfache Weise, daß diese Aussage richtig bleibt, wenn wir die Spektralmenge $S \subset \mathbb{C}$ geeignet wählen. Zunächst zwei Hilfssätze:

LEMMA 1. *Es sei* $\lambda \in \mathbb{R}$, $\varphi_0 \in C^1[0,1]$ *reellwertig. Besitzt* φ_0 *in* $[0,1]$ $m > 1$ *Nullstellen, so besitzt*

$$\varphi_1 = (D - \lambda)\,\varphi_0$$

in diesem Intervall mindestens $m - 1$ *Nullstellen.*

Beweis. Pólya–Szegö [12, Kap V, Aufg. 18]. Dieses Lemma läßt sich verallgemeinern, wobei dann auch komplexe Werte von λ zugelassen sind. Der Beweis gelingt mit einem auf Meinardus [10] zurückgehenden Trick, den dieser benutzte, um eine Schranke für die Anzahl der Nullstellen einer Kosinussumme zu bestimmen. Hajek [5] benutzte eine andere Methode.

LEMMA 2. *Es sei* $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda = \beta + i\omega$ *mit* $0 \leqslant \omega < \pi$. *Weiter sei* $\varphi_0 \in C^2[0,1]$ *reellwertig. Besitzt* φ_0 *im Intervall* $[0,1]$ $m > 2$ *Nullstellen, so besitzt*

$$\varphi_1 = (D - \lambda)(D - \bar{\lambda})\,\varphi_0$$

dort mindestens $m - 2$ *Nullstellen.*

Beweis. Wir definieren die Hilfsfunktion

$$s(\omega t) := \sin\left(\omega t + \frac{\pi - \omega}{2}\right).$$

Da die Funktion $s(\omega t)$ im Intervall $[0,1]$ nullstellenfrei ist, hat nach Voraussetzung auch die Funktion $e^{-\beta t}\varphi_0(t)/s(\omega t)$ in $[0,1]$ m Nullstellen, nämlich die gleichen wie φ_0. Wir betrachten die Funktion

$$\begin{aligned}\psi(t) &:= \frac{d}{dt}\left\{s^2(\omega t)\,\frac{d}{dt}\,\frac{e^{-\beta t}\varphi_0(t)}{s(\omega t)}\right\}\\ &= s(\omega t)\,e^{-\beta t}[\beta^2\varphi_0(t) - 2\beta\dot{\varphi}_0(t) + \ddot{\varphi}_0(t) + \omega^2\varphi_0(t)]\\ &= s(\omega t)\,e^{-\beta t}((D - \beta)^2 + \omega^2)\,\varphi_0(t).\end{aligned}$$

Nach dem Satz von Rolle hat $\psi(t)$ mindestens $m - 2$ Nullstellen in $[0,1]$, und da $e^{-\beta t}s(\omega t)$ in diesem Intervall keine Nullstelle besitzt, gilt die Behauptung auch für

$$((D - \beta)^2 + \omega^2)\,\varphi_0(t) = ((D - \lambda)(D - \bar{\lambda}))\,\varphi_0(t).$$

SATZ 1. *Eine Spektralmenge* $T \subset \mathbb{C}$ *sei gegeben durch*

$$T := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im}\lambda| < \pi\}.$$

Dann besitzt jede Exponentialsumme aus $V_n^{\,r}(T)$ *höchstens* $n - 1$ *Nullstellen oder verschwindet identisch.*

Beweis. Wir beweisen durch vollständige Induktion. Die Behauptung ist sicher richtig für $n = 1$ und $n = 2$. Nehmen wir an, sie sei richtig für alle $1 \leqslant k \leqslant n$.

Sei nun $y_n \in V_n^r(T) \backslash V_{n-1}^r(T)$, d.h. y_n ist Lösung einer Differentialgleichung $(D^n + c_1 D^{n-1} + \cdots + c_{n-1} D + c_n)\, y(t) = 0$. Dies ist äquivalent zu $(D - \lambda_1)(D - \lambda_2) \cdots (D - \lambda_n)\, y(t) = 0$, wobei die λ_ν $(\nu = 1, \ldots, n)$ entsprechend ihrer Vielfachheit die Wurzeln des charakteristischen Polynoms sind. Wir nehmen an, y_n habe m Nullstellen in $[0, 1]$ und unterscheiden folgende Fälle:

(a) Es gibt eine relle Wurzel, die wir oBdA mit λ_1 bezeichnen. Dann hat nach Lemma 1 $(D - \lambda_1)\, y_n(t)$ mindestens $m - 1$ Nullstellen. Andererseits ist $(D - \lambda_1)\, y_n(t) \in V_{n-1}^r(T)$, besitzt also nach Induktionsannahme höchstens $n - 2$ Nullstellen in $[0, 1]$. Aus $m - 1 \leqslant n - 2$ ergibt sich damit $m \leqslant n - 1$.

(b) Alle Wurzeln sind paarweise konjugiert komplex. Dann hat nach Lemma 2 $(D - \lambda_1)(D - \bar{\lambda}_1)\, y_n(t)$ mindestens $m - 2$ Nullstellen. Wegen $(D - \lambda_1)(d - \bar{\lambda}_1)\, y_n(t) \in V_{n-2}^r(T)$ erhalten wir nach Induktionsannahme $m - 2 \leqslant n - 3$.

Somit ist auch in diesem Fall $m \leqslant n - 1$ und unser Satz vollständig bewiesen.

Wie die Funktion $y_2(t) = \sin \pi t \in V_2^r(\mathbb{C})$ zeigt, kann die Spektralmenge T nicht vergrößert werden.

Ist $y_n(b, c) \in V_n^r(\mathbb{C})$ fest vorgegeben, so bezeichnen wir die reelle Tangentialmannigfaltigkeit, die von sämtlichen Ableitungen von $y_n(b, c)$ nach den Parametern b_ν und c_ν $(\nu = 1, \ldots, n)$ aufgespannt wird, mit $W_n^r(b, c)$ und ihre Dimension mit $d(b, c)$, d.h.

$$W_n^r(b, c) := \left\{ \sum_{\nu=1}^{n} \left[b_\nu^* \frac{\partial}{\partial b_\nu} + c_\nu^* \frac{\partial}{\partial c_\nu} \right] y_n(b, c) \colon b_\nu^*, c_\nu^* \in \mathbb{R} \right\},$$

$$\dim W_n^r(b, c) = d(b, c).$$

$W_n^r(b, c)$ läßt sich nach Kammler [7] andererseits angeben gemäß

Lemma 3. *Ist $y_n(b, c) \in V_n^r(\mathbb{C})$ eine Exponentialsumme der Ordnung k, so gilt $d(b, c) = n + k$ und die Tangentialmannigfaltigkeit $W_n^r(b, c)$ läßt sich beschreiben durch*

$$W_n^r(b, c) = \{h \colon Q_n(b, c; D)\, P_n(c; D) h(t) = 0,\ 0 \leqslant t \leqslant 1\}.$$

Dabei ist $P_n(c; D)$ gemäß (1.1) *der die Exponentialsumme definierende Operator und*

$$Q_n(b, c; D) := \begin{cases} 1, & k = 0, \\ (D - \lambda_1) \cdots (D - \lambda_k), & k \geqslant 1, \end{cases}$$

der Operator niedrigster Ordnung, der $y_n(b, c)$ annulliert.

Eine direkte Folgerung aus Satz 1 und Lemma 3 ist das folgende

LEMMA 4. *Die Funktionenfamilie $V_n^r(T)$ erfüllt die Haarsche Bedingung lokal, d.h. für $b, c \in \mathbb{R}^n$ mit $\Lambda_n(c) \subset T$ genügt der lineare Raum $W_n^r(b, c)$ der Haarschen Bedingung.*

3. CHARAKTERISIERUNG VON MINIMALLÖSUNGEN

Die folgenden Charakterisierungssätze sind Übertragungen der Sätze 11, 13 und 14 von Meinardus und Schwedt [11], die allerdings von einer offenen Parametermenge ausgehen. Unsere Parametermenge sei gegeben durch

$$T^* := \{\lambda \in \mathbb{C}: 0 < |\operatorname{Im} \lambda| \leq L < \pi\}. \tag{3.1}$$

Die Funktionen aus $V_n^r(T^*)$ sind auf einer offenen Obermenge von T^*, nämlich $\mathbb{C}$, nach dem Parameter stetig differenzierbar. Liegen alle Nullstellen des charakteristischen Polynoms im Innern von T^*, so gibt es zu jedem Parameter c und $h \in \mathbb{R}^n$ ein $t_0 > 0$ mit $c \in th \in T^*$ für all $t \in [0, t_0]$. Nach Collatz und Krabs [4] erhalten wir damit

SATZ 2. *Eine hinreichende und im Fall, daß die Frequenzen von $y_n(b, c)$ im Innern von T^* liegen, auch notwendige Bedingung dafür, daß $y_n(b, c) \in V_n^r(T^*)$ Minimallösung an $f \in C[0, 1]$ bezüglich $V_n^r(T^*)$ ist, ist die Existenz einer Alternante der Länge $n + k + 1$, d.h. es gibt $n + k + 1$ Punkte*

$$0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_{n+k} \leq 1 \tag{3.2}$$

mit

$$f(t_\nu) - y_n(b, c; t_\nu) = -\{f(t_{\nu-1}) - y_n(b, c; t_{\nu-1})\}$$

und

$$|f(t_\nu) - y_n(b, c; t_\nu)| = \|f - y_n(b, c)\|$$

für $\nu = 0, 1,..., n + k$. Liegen alle Frequenzen im Innern von T^*, so ist die Minimallösung eindeutig bestimmt.

SATZ 3. *Existieren $n + k + 1$ Punkte t_ν in der Anordnung* (3.2) *mit*

$$\operatorname{sgn}\{f(t_\nu) - y_n(b, c; t_\nu)\} = -\operatorname{sgn}\{f(t_{\nu-1}) - y_n(b, c; t_{\nu-1})\}$$

für $\nu = 1,..., n + k$, so gilt für die Minimalabweichung die Abschätzung

$$\rho_{V_n^r(T^*)}(f) \geq \min\{|f(t_\nu) - y_n(b, c; t_\nu)|: 0 \leq \nu \leq n + k\}.$$

Bemerkung. Die Aussagen der Sätze bleiben richtig, wenn die Spektralmenge T^* ersetzt wird durch eine in $\mathbb{C}$ abgeschlossene Teilmenge von T^*, die noch innere Punkte enthält.

Auf die Bedingung der inneren Punkte kann man nicht verzichten, wie folgendes Beispiel verdeutlicht

Beispiel. Es besteht $V_n^r(\{0\})$ aus allen Polynomen höchstens $(n-1)$-ten Grades mit reellen Koeffizienten. Die Approximation bzgl. $V_n^r(\{0\})$ ist also ein lineares Problem. Nach dem Alternanten-Satz von Tschebyscheff existiert zu einer Minimallösung $y \in V_n^r(\{0\})$ eine Alternante der Länge $n+1$. Diese Länge stimmt mit der in Satz 2 angegebenen nur dann überein, wenn y die Nullfunktion ist, d.h. $k = 0$.

Literatur

1. D. Braess, Approximation mit Exponentialsummen, *Computing* **2** (1967), 309–321.
2. D. Braess, Chebyshev approximation by γ-polynomials, *J. Approximation Theory* **9** (1973), 20–43.
3. D. Braess, Chebyshev approximation by γ-polynomials, II, *J. Approximation Theory* **10** (1974), 16–34.
4. L. Collatz und W. Krabs, "Approximationstheorie," Teubner, Stuttgart, 1973.
5. O. Hajek, On the number of roots of exp.-trig. polynomials, *Computing* **18** (1977), 177–183.
6. D. W. Kammler, Existence of best approximation by sums of exponentials, *J. Approximation Theory* **9** (1973), 78–90.
7. D. W. Kammler, Characterization of best approximation by sums of exponentials, *J. Approximation Theory* **9** (1973), 173–191.
8. I. Kolumban, Über die nichtlineare trigonometrische Approximation, *in* "Numerische Methoden der Approximationstheorie" (Herausgeber: L. Collatz und G. Meinardus), Bd. 2, 67–72, Birkhäuser, Basel, 1975.
9. G. Meinardus, "Approximation of Functions, Theory and Numerical Methods," Springer–Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1967.
10. G. Meinardus, Über ein Problem von L. Collatz, *Computing* **8** (1971), 250–254.
11. G. Meinardus und D. Schwedt, Nicht-lineare Approximationen, *Arch. Rational Mech. Anal.* **17** (1964), 297–326.
12. G. Pólya, und G. Szegö, "Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis," Bd. 2, Springer–Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg, 1960.
13. M. Voorhoeve, On the Oscillation of Exponential Polynomials, *Math. Z.* **151** (1976), 277–294.